Αξιωματική Θεμελίωση

- Αξιώματα Νεύτωνα για την κίνηση των σωμάτων: Έχουν επαληθευθεί πλήρως πειραματικά

1ο αξίωμα (Νόμος της Αδράνειας).

"Ένα σώμα παραμένει σε κατάσταση ηρεμίας ή ευθύγραμμης ισοταχούς κίνησης, εκτός αν επιδρά πάνω του δύναμη."
Για να ποσοτικοποιήσουμε το αξίωμα ορίζουμε την έννοια της ορμής ή ποσότητα κίνησης $\vec{P} = m\vec{v}$

Φυσική σημασία: Αν $\vec{v}$ σταθερή $\longrightarrow$ $\bar{P}$ σταθερή

Συνεπώς ένα σώμα δε μπορεί να αλλάξει από μόνο του την κινητική του κατάσταση

2ο αξίωμα (Νόμος της Επιτάχυνσης)

"Η μεταβολή της ορμής ενός υλικού σημείου είναι ανάλογη της δύναμης που επιδρά σ' αυτό και γίνεται κατά τη διεύθυνση της δύναμης"
Δηλαδή

$$\bar{F} = \frac{d\bar{P}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\bar{v})$$

Όταν η μάζα παραμένει σταθερή: $\bar{F} = m\dfrac{d\bar{v}}{dt} = m\bar{\alpha}$

Φυσική σημασία: Το αξίωμα εισάγει τις έννοιες της μάζας και της δύναμης, η σχέση των οποίων καθορίζει την κίνηση.

$\bar{F} = m\bar{\alpha} = m\dfrac{d^2\bar{r}}{dt^2}$ (Η τροχιά $\bar{r}(t)$ προκύπτει ως λύση της διαφορικής εξίσωσης).

"Αρχή του καθορισμού"

Στα πλαίσια της κλασικής μηχανικής, η εξέλιξη ενός συστήματος είναι μονοσήμαντα καθορισμένη από την αρχική του κατάσταση (θέση - ταχύτητα) και το 2ο αξίωμα του Νεύτωνα.

3ο αξίωμα (Νόμος Δράσης - Αντίδρασης)

"Οι δυνάμεις τις οποίες ασκούν δυο υλικά σημεία το ένα στο άλλο είναι ίσες κατά μέτρο κι αντίθετες σε φορά και ενεργούν στην ευθεία που ενώνει τα δυο σημεία"

Αν F_{12} η δύναμη που ασκεί το σώμα 1 στο 2 και F_{21} η δύναμη που ασκεί το 2 στο 1 τότε $\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}$

Φυσική σημασία: Οι δυνάμεις εκδηλώνονται σε ζεύγη. Δεν υπάρχει μεμονωμένη δύναμη.

• Οι έννοιες του χώρου και του χρόνου.

Ο χώρος θεωρείται συνεχής, ομογενής και ισότροπος και τα αποτελέσματα ενός πειράματος είναι ανεξάρτητα των χωρικών του συνθηκών και του προσανατολισμού.

Ο χρόνος είναι ομογενής, δηλαδή τα αποτελέσματα ενός πειράματος είναι ίδια για διαφορετικές χρονικές στιγμές εκτέλεσής του.

• Είδη δυνάμεων: 4 είδη

- Βαρυτικές
- Ηλεκτρομαγνητικές
- Ισχυρές πυρηνικές
- Ασθενείς πυρηνικές

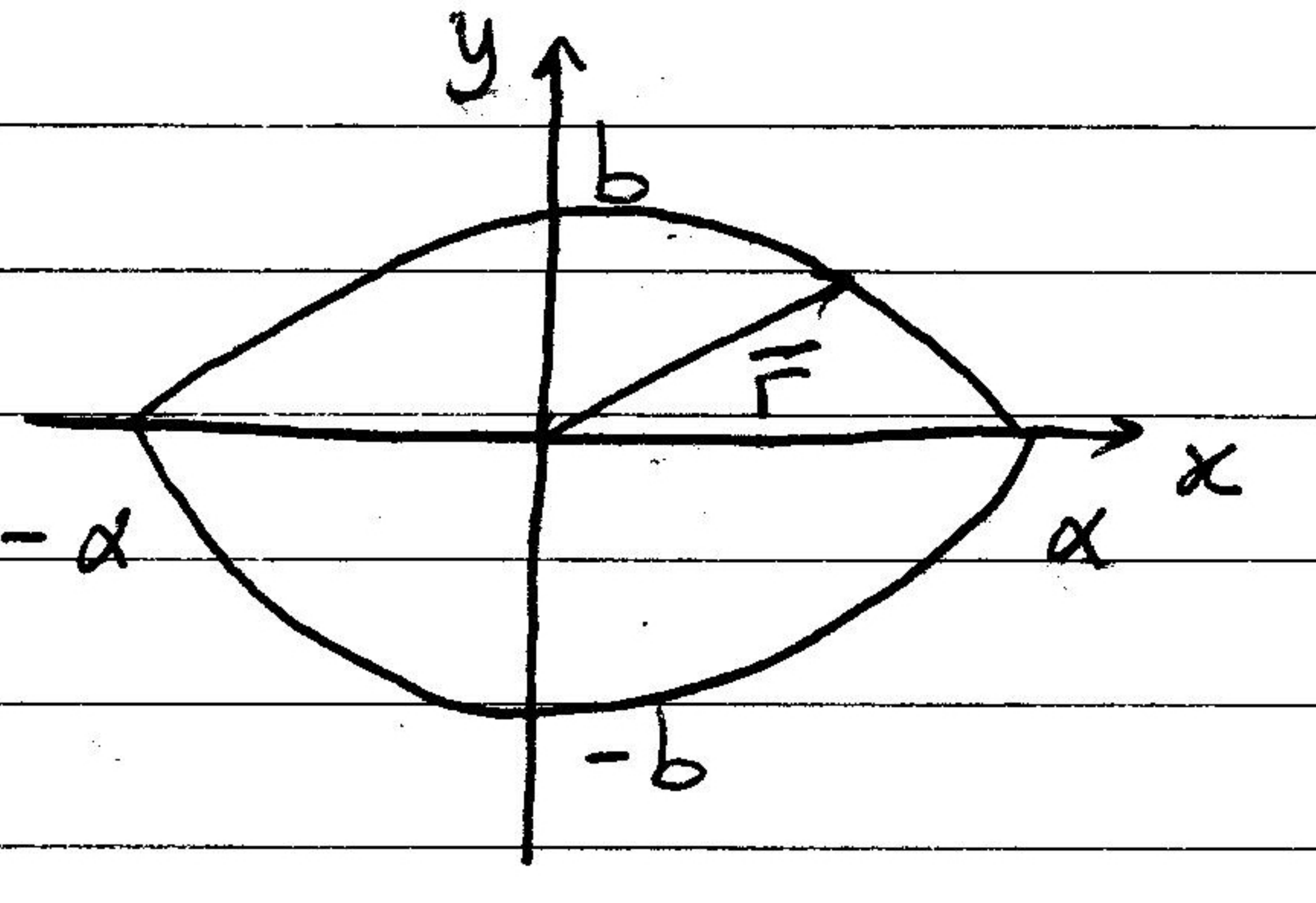
Η μονάδα δύναμης είναι το 1 Nt και αντιστοιχεί στη δύναμη που χρειάζεται μάζα 1 Kg για να επιταχυνθεί με $1\, m/s^2$

Παράδειγμα: Υλικό σημείο μάζας m κινείται στο επίπεδο xy με τροχιά $\bar{r}(t) = (\alpha \cos t)\hat{i} + (b \sin t)\hat{j}$, $\alpha, b, w > 0$
$\alpha > b$

Να δειχθεί ότι το σωματίδιο κινείται σε έλλειψη, και η δύναμη που του ασκείται έχει φορά προς το κέντρο της έλλειψης

$$\begin{cases} x = \alpha \cos(wt) \\ y = b \sin(wt) \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} \dfrac{x}{\alpha} = \cos(wt) \\ \dfrac{y}{b} = \sin(wt) \end{cases}$$

$$\left(\frac{x}{\alpha}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1 \quad \text{έλλειψη.}$$



$$\bar{F} = m \frac{d^2 \bar{r}}{dt^2}$$

$$\bar{v} = \frac{d\bar{r}}{dt} = (-\alpha w \sin wt)\hat{i} + (b w \cos wt)\hat{j}$$

$$\bar{\alpha} = \frac{d\bar{v}}{dt} = (-\alpha w^2 \cos wt)\hat{i} + (-b w^2 \sin wt)\hat{j}$$

$$= -w^2 \left[(\alpha \cos wt)\hat{i} + (b \sin wt)\hat{j} \right] = -w^2 \bar{r}$$

με $\bar{F} = -m w^2 \bar{r}$, με φορά προς το κέντρο της έλλειψης

Νόμος Παγκόσμιας Έλξης

Ο βασικός νόμος που καθορίζει βαρυτικές δυνάμεις διατυπώνεται ως εξής:

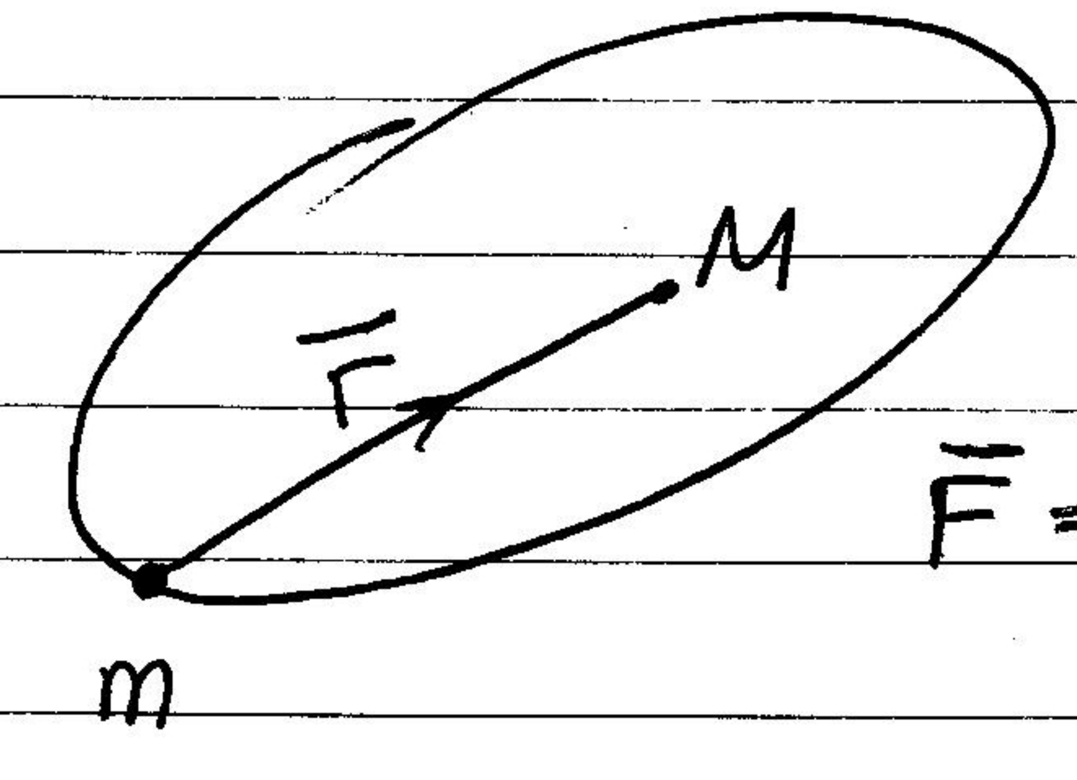
"Δύο υλικά σημεία έλκονται μεταξύ τους με δύναμη ανάλογη των μαζών τους κι αντιστρόφως ανάλογη του τετραγώνου της μεταξύ τους απόστασης. Η δύναμη ενεργεί στην ευθεία που συνδέει τα δύο σημεία. Είναι:

$$\bar{F} = -G\frac{M_1 M_2}{r^2}\,\hat{r}\,, \quad G = 6{,}67\cdot 10^{-11}\ \frac{Nt\,m^2}{Kg^2}$$

Το βάρος των σωμάτων ή μιας μάζας είναι:

$\bar{B} = -G\dfrac{Mm}{R^2}\,\hat{r} = -gm\hat{r}$ όπου $g = G\dfrac{M}{R^2}$, R, M ακτίνα - μάζα της Γης.

Εφαρμογές: Οι τροχιές των πλανητών είναι επίπεδες.



Έστω ένας πλανήτης που περιστρέφεται γύρω από τον ήλιο.

$$\bar{F} = m\frac{d^2\bar{r}}{dt^2} \Longrightarrow -G\frac{Mm}{|\bar{r}|^2}\,\hat{r} = m\frac{d^2\bar{r}}{dt^2}$$

$$\frac{d^2\bar{r}}{dt^2} = -G\frac{M}{|\bar{r}|^3}\,\bar{r}\,, \quad \text{με } \hat{r} = \frac{\bar{r}}{|\bar{r}|}$$

δηλαδή τα διανύσματα $\bar{r}$ και $\dfrac{d^2\bar{r}}{dt^2}$ είναι παράλληλα, δηλαδή

$\bar{r}\times\dfrac{d^2\bar{r}}{dt^2} = \bar{0}$. Όμως $\dfrac{d}{dt}\left(\bar{r}\times\dfrac{d\bar{r}}{dt}\right) = \dfrac{d\bar{r}}{dt}\times\dfrac{d\bar{r}}{dt} + \bar{r}\times\dfrac{d^2\bar{r}}{dt^2}$

$= \bar{0}$, άρα $\bar{r}\times\dfrac{d\bar{r}}{dt} = \bar{C}$. Το διάνυσμα $\bar{C}$ ορίζει το επίπεδο της τροχιάς $\bar{r}$ και της $\dfrac{d\bar{r}}{dt} = \bar{v}$.

Νόμοι Keppler.

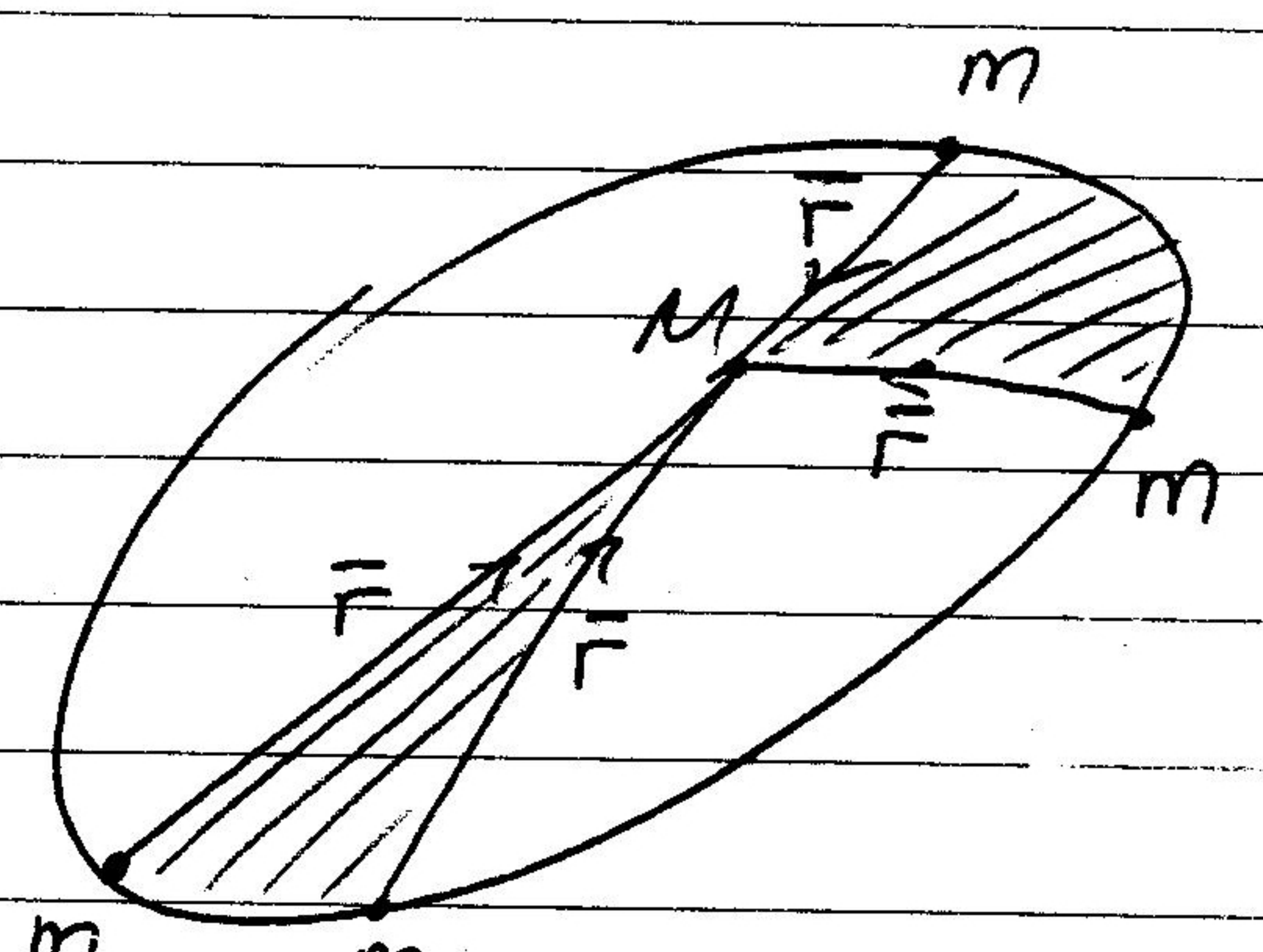
- Νόμος Κωνικών Τομών.

"Η τροχιά ενός πλανήτη είναι κωνική τομή με τον ήλιο στη μια εστία της. Έχει εκκεντρότητα $e = \frac{r_0 v_0^2 - 1}{GM} - 1$,

r_0, v_0 αρχική θέση και ταχύτητα του πλανήτη,
τροχιά
$$r = \frac{(1+e)r_0}{1+e\cos\theta}$$, M μάζα του ήλιου."

- Νόμος Ίσων Εμβαδών.

"Το διάνυσμα που συνδέει τον ήλιο με τον πλανήτη, σαρώνει ίσα εμβαδά σε ίσους χρόνους."

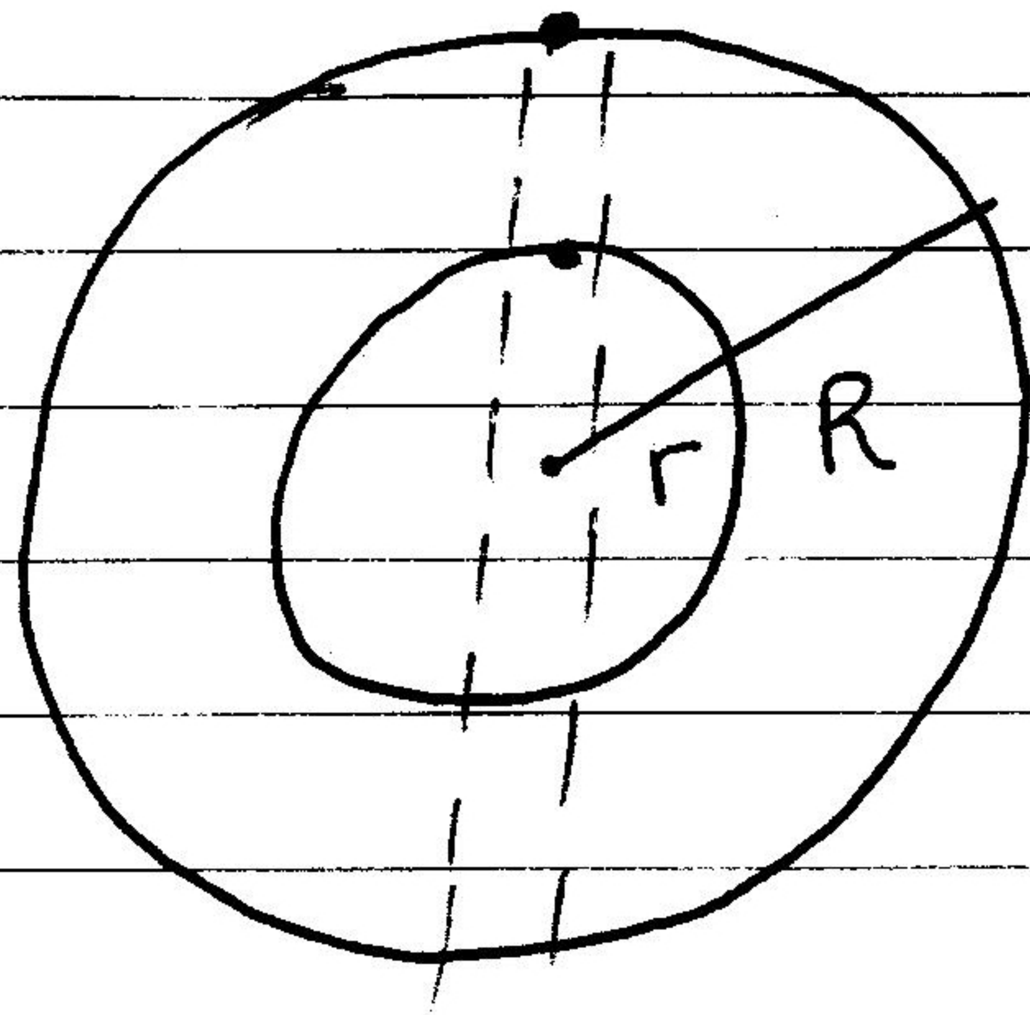


- 3ος νόμος

"Ο χρόνος T που χρειάζεται ο πλανήτης για μια πλήρη περιφορά γύρω από τον ήλιο καλείται περίοδος και σχετίζεται με το μέγεθος ημιάξονα α της κίνησης ως εξής:

$$\frac{T^2}{\alpha^3} = \frac{4\pi^2}{GM}$$

Απύθμενο Πηγάδι



Αν r η ακτίνα στην τυχαία χρονική στιγμή η αντίστοιχη μάζα της Γης είναι $M_r = \rho \frac{4\pi}{3} r^3$

Νόμος Ν.Ε.: $m \frac{d^2 r}{dt^2} = -G \frac{M_r m}{r^2} \Rightarrow \frac{d^2 r}{dt^2} = G \frac{\rho \frac{4\pi}{3} r^3}{r^2}$

$$\Rightarrow \frac{d^2 r}{dt^2} = -\underbrace{\left(G \rho \frac{4\pi}{3}\right)}_{\omega^2} r \Rightarrow \omega = \sqrt{G\rho \frac{4\pi}{3}} = \sqrt{\frac{G M_R}{R^3}}$$

$$\frac{d^2 r}{dt^2} + \omega^2 r = 0 \quad , \quad \rho = \frac{M_R}{\frac{4\pi}{3} R^3}$$

$\Downarrow$

$r(t) = c_1 \cos(\omega t) + c_2 \sin(\omega t)$.

Αντικαθιστώ $G = 6{,}67 10^{-11}$ Ntm^2/kg^2, $M_R = 5{,}97 10^{24}$ kg

$R = 6{,}37 \cdot 10^6$ m

Το σώμα εκτελεί ταλάντωση με περίοδο $T = 145$ hrs.